کوش KUSCH

د فرنڅیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleicungen

ژباړن:
ډاکټر ماخان (میرې) شینواری

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان (په اولني نوم مېږی) د اروابنادي پښتو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شينوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه يې د ۱۳۲۴ هـ ل کال څخه يو يا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کليوالي ښوونځي وروسته، چې د لومړنيو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د يوه بورس له لارې اطريش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکټرۍ بريالی شو.

د ۱۹۸۷ م کال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنيو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م کال د اپريل تر نيمايي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژدافير وو او د ۱۹۹۲ يوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شينواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطريش ته راغی) دی په نهم ټولګي کې يې کوزده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچيان وبخښل، ځانګه او اباسين، چې د ۱۹۷۹کال د مۍ په شلم په اطريش کې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen
Kultur e. V. Köln, Germany

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا
دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومی لوي تر یوې برخی د توپیري پوتنځونو سره لکه $x , y \; z^2 , a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغی رابیلدنی یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د یوه دیفرنځیالمساوات څخه غږیدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبی یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې ورې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو،په تخنیك کې، دمهمو کاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته څه نومونه چی راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تیرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمي وي اوکه شمیرپوهنیزې.که پوه شوم، چی کومی کلیمي ځما په تیرو کتابونوکی روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هڅیږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چی کوم شیان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمی

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ايريشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسځندنت مساوات. $y = \sin x ; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په يواځنی يو $y \in R$ تنظيميږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = \langle f \rightarrow f(x) \rangle$$
$$y + 2x = y' . x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = \langle x \rightarrow f(x), f'(x), f''(x) \rangle$$
$$\Rightarrow y = f\langle x, y', y'' \rangle$$

دفرنځيالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y يواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابيليدنی لکه

$$dy / dx = y' ; d^2 y / dx^2 = y'', \ldots ,$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنځيالمساوات بلل کيږي.

د ديفرنځيالمساوات ټوليزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د ديفرنځيالمساوات ناپيژندونکی د ډيرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – يا ټوټه ديفرنځيال مساواتوځخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي ټوليزه بڼه يا فورم

$$0 = f\left(x; y; z, \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \ldots ; -\right)$$

د n,....,1.,2 (يعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم ديفر–نځيالمساواتو ترمنځ توپير کوو

د ۱ –ام نظم ديفرنځيامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

۲. – ام نظم د.م $3x^2+ y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

. د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنځیالمساوات کی هغه لوړدیفرنځیالکوځینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنځیالویش د دیفرنځیالمساوات نظم ورکوي .

د دفیرنځیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا ګراد Grad کی ورکړ شوي دي.د دفیرنځیالمساوات ګراد د دیفرنځیالمساوات د زیاتوونو له لاري ټاکل شوي دي، په کوم کی چی د بلواکو اوښتونکو یا واریابلو د ځکیو یا لوړیو یا اکسپونتتونو او د دیفرنځیالویش هغه زیاتون چی د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 +y = 0$

۲. . درجه $x^4 y' y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y.y''^3 + y''. x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنځیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجی $4x^5y^2 + 2y.y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنځیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y.y'' + 4x.y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنځیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنځیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنځیالمساوات اینتیګرال هم بلل کیږي، ځکه، چی په بنسټیزه توګه رابیلیدنی د اینتیګرال له لاري لاس ته راځي د دیفرنځیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندې په مساواتو کی منځ ته راغلو، د دفیرنځیالونو او دیفرنځیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دې مانا چی د ورکړشوو رابیلیدنو ځخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

بیلگه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy / dx = y' = - x / 2$

$dy = -(x / 2).dx$

د رابیلیدنو د له منځورنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسي. د دیفرنځیالمساواتو اوبي یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$\int dy = - (1 / 2) \int x.dx$

اوبي (حل) $y = -(1 / 4) x^2 + C , C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(1/4) x^2 + c >$

یادونه :داسي پورته مات نوکان $>, <$ دې بیا لږ لوی ولیکل شي، زه یې په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(1/4) x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = - x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر– یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفنرنځیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کېمټ یا ایدنتیك مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \;\blacktriangleright\; y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یې په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبي

$y = - (1 / 4)x^2 + C$

د ازمایښت لپاره نتیجه بیرته دیفرنځیالیږي یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفیرنځیالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چی بیرته په دې توګه دیفرنځیالمساوات لاس ته راغی.

بیلګه: د دیفرنځیالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی یا حل سره، لکۀ څنګه په ټولو اینتیګرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي،

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونی یا حلونه کیدی شي، چی پۀ درې ډلو وویشل شي.

۱ – ټولیز اوبی

د دفرنځیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیګریشن کی یوه اینتیګریشن ثابته c رامنځ ته کیږي.

که د دیفرنځیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفیرنځیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دیفرنځیالمساوات ټولیز اینتګرال بلل کیږي.

بیلګه :

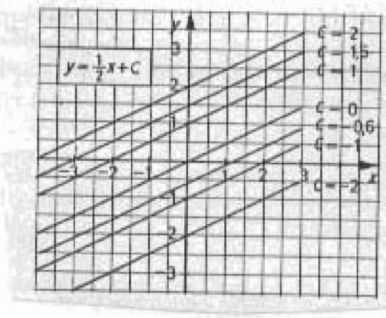
دفرنځیالمساوات $y' = 1 / 2$

$$\Rightarrow \quad y = (1 / 2) \quad dx$$
$$= (1 / 2)\, x + c$$

ټولیز دفرنځیالمساوات $f = \langle x \to (½)x + c \mid c \in R \rangle$

د یوه دیفنځیالمساوات ټولیز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چی یو له بل سره غبرګی څغلي) په څیر په ګراف کیانځوریدلی شي .

دلته ناپایډیرې اوبیونی ممکن دي، ځکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.



خیره

۲ - پارتیکیولر–یا ټوټئیز اوبیونه partikuläre Lösung
یا برخه ئیز– یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow (½)x + c, c \in R \rangle$

ټولیز اوبی $y = (1/2)x + c \ , c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه $y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1,5$

ارښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

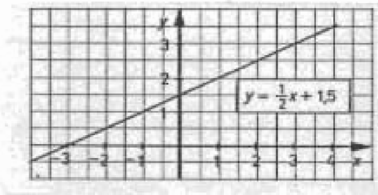
$\Rightarrow 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = <x \longrightarrow (½)x + 1,5>$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کی د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه ښایي د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونی singuläre Lösungen

دا لاندي دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د ډفرنځیالمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ► *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x+c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ► *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x+c)$

نیولی
تولیز
اوبیفنکشن

ازمایښت

$$y = \sin(x+c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x+c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x+c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x+c)$$
$$y^2 \quad + \quad y'^2 \quad = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) = 1$$

دا ځنی دفرنځیالمساوت د دې تر څنګ نورې اوبیونی هم لري، کومی چی په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل ځځه رابیلیدوړ نه دی.
د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر څنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو
$f_1 = < x \longrightarrow 1 >$ او $f_2 = < x \longrightarrow -1 >$

سره هم پوره کیږي.
دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څیر ښایي، چی د x –محور سره غبرګی ځغلي، کومی چی ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

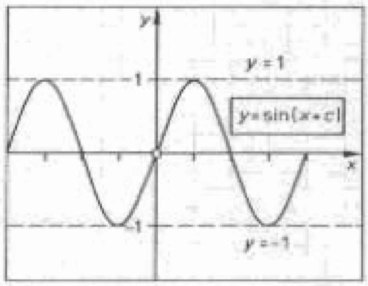
$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$

$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_1 = \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \mapsto -1 \rangle \end{array}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې
یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کې به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

د اوبیونی متودونه

د دیفرنخیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنخیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړئ!

$$1. \qquad y' = 4x$$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یواځې د لمړي نظم دیفرنخیالکوڅینت یا دیفرنخیالویش مخ ته پروت دی، نو د dy پسی برابریږي یا ترتیبیږي او اینتیګرالیږي.

اینتیګرالونه $dy = 4x\,dx$.

$$\int dy = 4\int x.dx$$
$$y = 2x^2 + c,\ c \in R$$
$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

2. که ډیر اینتیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$
$$y = 8 \cdot \int x^3\,dx - 2 \cdot \int x^2\,dx$$
$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$
$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنخیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیګرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیږي

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$
$$y' = \int x^2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + c_1 ;\ c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 ;\ c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle}}$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنځیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او

له dx سره خلیږي

بیا دا بدلونښه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $c = 2(c_2 - c_1)$ ته سره را یوځاي کیږي. (دې ته دې په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$
$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int \cos x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$
$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$
$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \sin x + c} ;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - \sqrt{2 \cdot \sin x + c} | c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنځیالمساوات د dx سره خلیږي.

وریسی د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1 , c_2

او c_3 و يوې ثابتې c ته سره راټوليږي يا رايوځاي کيږي.
که دواړو لورو ته وريسې مربع تکميلونه ۱ ور زياته شي نو y شميرل کيدی شي، او لاس ته راغلی f ټوليز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int dy + \int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright\ 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y-1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 | c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

په ياد ولرئ

۱ – ديفرنځيالمساوات په ټوليزه توګه ټوليز، پارتيکيولار او په ورکړ شوي حالت کي زينګولار اوبيونی يا حلونه لري.

۲ – ديفرنځيالمساوات په مناسب يا ورته شميرنيز کارونی له لارې په زياتون– حالتونو کی د اينتيګرال له لارې اوبي کيږي.

۳ – زيات وخت بايد چي اوبي ونيول شي او دا اوبی بيا د هغه د ريښتينوالی لپاره و ازمايل شي.

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنځیالمساوات اوبې یا حل کړی

1 . $y'' = x \cdot e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$
4 . $x \cdot y'' = 3y'$ 5 . $y \cdot \ln x = x \cdot y'$ 6 . $y' \cdot y + y' + x = 0$
7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' \cdot y = x + 1$
10 . $y' \cdot y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$
12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$
14 . $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x \cdot y' = y$
17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$
19 . $3x - y'' = a$ 20 . $y'' = y'$ 21 . $y'' = x \cdot \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواځی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترڅنګ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y , y' اوx موجودیت او لویوالی تنظیمونی پسی د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښنه

کیږي، په کومکي چی ممکن وي،چی لويي $dy, g(y)$ په همدې توګه $dx, f(x)$ هر يو يې په يوه لور بیل یا ځانلۀ کړو.
د دې اړونی سره کیدی، چی مساوات په دواړو خواوو ایتګرال شي.
بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \blacktriangleright y^3 = g(y);\ x^2 = f(x)$$

$$\int y^3\, dy = \int x^2\, dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چی د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندي بیلګه کی روښانیږي).
دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.
بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \blacktriangleright x^2 = f(x);\ y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2\, dy = \int x^2\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \blacktriangleright 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

۲ . د دې لپاره ، چی د dy د $g(x) = y - 4$ سره او x د $f(x) = x^2$ سره رايوځايونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي. *

وریسی له دې سره dy او $g(y)$ همدا ډول dx او $f(x)$ هر یو په یوه خوا خانلهٔ کیږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کی پراته یا ځای وي. **
د مساوات دواړه خواوې ایتیګرال کیږي. د اینتیګرالثابتي c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډیږي.
دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کیږي. د e^C لپاره c اینسوول کیږي.***
اوf د دفرنځیالمساوات تولیز اوبی دی****

یا دونهٔ : لاندې د شمیرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***... په **** پسي **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0 \qquad *$$

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \qquad **$$

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3 \qquad ***$$

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle}} \qquad ****$$

ديفرنځيالمساوات د جلا يا بيلو شوواووبښتونو سره، ځان په دې ګروپونو ووېشل کوي

۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرينوركوني وظيفه وركوي، لكه ځنګه، چې په اينتيګرالشميرنه كې.

بيلګه :

$$y' = x^2$$

$$dy / dx = x^2 \quad \text{بدلونه}$$

$$dy = x^2\, dx \quad \text{اينتيګرالونه}$$

$$y = \int x^2\, dx$$

$$y = (x^3 / 3) + C \quad \text{ټوليز اوبې}$$

دلته f ټوليز حل دى. $\Rightarrow f = \langle x \rightarrow (x^3/3) + c \mid c \in R \rangle$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووبښتونى dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په يوه خوا ځانله كيږي.

د مساوات دواړه خواوې اينتيګراليږي، د كوم سره چې د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2+1}$ اينتيګرال پخوا اوبې شويدى. .

بيلګه (يادونه : دا بيلګه لكه چې ناريښتيا اوبې وې، پام ورته وكړى، ؟؟ .)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

كيڼ لور ته ځانله كيږي په داسې توګه، چې د اينتيګريشنشابته $\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$

ښي خوا ته راوړل شي او مساوات د $\sqrt{3}$ 2 سره ځل شي،

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په ښي لور اکسپونتشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په یوه ځل توپه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کیږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بیا د (3 - 3y) سره ځل کیږي او بالاخره مساوات د y سره کیڼ لور ته راوړل کیږي همداسی $\sqrt{3}$ و ښي خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځیالمساوات د ټولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x)\,.\,g(y)$ ښي مساوات

د فرنځیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیګرالیږي.

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c - c} = c$$

وریسی بیا f ټولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 \, dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

.

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بنې یا فورم مساوات اووېشتونی dy , y او dx , x دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow \quad y \, dy = x \, dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینتیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y \, dy = \int x dx$$

$$(1/2) y^2 + c_1 = (1/2) x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی یا حل دی.

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

۵ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووبېتونې y , dy او x , dx په دواړو خواوو ځانله کيږي . او په اخر کې دو خواوې اينتيګراليږي او په y پسې اوبې کيږي.

هغه لاس ته راوړې اينتيګريشنشابتې پردو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$$y' = y / x \; ; \quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x.c|$$
$$y = x.c$$
$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x.c \mid c \in R \rangle$$

دا لاس ته راغلى f ټوليز حل دى

بيلګې

1 .
$$y' - 3x = -4x^2$$
$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4. \int x^2\, dx + 3. \int x\, dx$$

$$y = (4/3)\, x^3 + c_1 + (3/2)\, x^2 + c_2$$

پردو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2) x^2 + c \rangle$$

دا f د مساوات ټوليزه ابيونه ده

۲ .
$$\sin x - y' = \cos x + y'$$
$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$
$$2dy = \sin x \,.\, dx - \cos x \,.\, dx$$

$$y = (1/2) \int \sin x\, dx - (1/2) \int \cos x\, dx$$

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/2 9 \sin x + c_2$$

ږدو: $c_1 + c_2 = c$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c \rangle$$

3 . $2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z + a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیکرال د مخه اوبې شوی دی (پا دا یو ،نه)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2]\, dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}}\right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln\left|\frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{5}\cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\underline{\ln z = a \Leftrightarrow z = e^a}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5}\cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)}$$

ږدو $e^{2\sqrt{5}.(c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره خلیږي، وروسی هغه غړی، چې y لري د مساوات یوې لور ته خانلۀ کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y په لور اوبې - یا حل کیږي، چې په دې

توکه ټولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y=\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\to\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}\right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی.

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کی دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$

$$dy / y = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 / y)\, dy = \int dx$$

$$\ln| y | + c_1 = x + c_2$$

$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1) \quad , \quad c_2 - c_1 = c$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = < x \longrightarrow e^{x+c} >$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln| y | - x$$

$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 ټوټه ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = < x \longrightarrow e^{x+1} >$$

بیلګه ۵ . $x.\sqrt{y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توټه کیږي.
د دي برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

$$c_1 + c_2 + c_3 = c$$ پردو

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وروسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځای کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

پردو $x_1 = 2,\ y_1 = 10$

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 = 9,8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځای په ځای کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو رېښه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} . dx$$

په لاندې کې راغلی اینټیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبی شوی دی. دا اینټیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x + c\right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.
که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کې کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1-x_1^2} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\quad y_1 = 0$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{4}\right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $dx , f(x) = x / (x^2 + 1)$ د دفرنځیالمساوات په دواړو خواو کې ځانله کیږي.
د مساوات دواړه خواوی اینټیګرال کیږي او بیا د y پسې اوبي یا حل کیږي.

$$dy / dx = y.[x /(x^2+1)]$$
$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$
$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$
$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیگرالثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln | c |$ ته هدفمند دی.

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2+1} + (c_2 - c_1) ,\ c_2 - c_1 = \ln |c|$$
$$\ln | y | = \sqrt{x^2 + 1} + \ln | c |$$
$$\ln | y | = \ln| \sqrt{x^2 + 1} . c |$$
$$y = \sqrt{x^2 + 1} . c$$

او لاندې f تولیز اوبیفنکشن دی.

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2 + 1} >$$

بیلګه ۸: $y' = [(x^2 - 4) / x^2].\quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی.

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو ځانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{1 - y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{(x^2 - 4) \cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1

او c_2, c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\operatorname{Arcsin} y + c_1 = x + c_2 - 4[- (1 / x) + c_3]$$
$$\operatorname{Arc} y = [(x^2 + 4) / x] + c$$
$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

د دې په اخر کې ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسی ، چی x_1 او y_1 د فنکشن- مساوات په ټولیز اوبی کی ځای په ځاي شي.

په دې توګه ورپسی ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin}\, y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \text{Arcsin}\, 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$

دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.

غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواځانله کیږي. انتیګریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چی ایمپلیځیت نه شی انځوریدلی وروسته پردو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\, dy$$

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او dy , y ځانلونی وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځاي شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انځوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4+x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int \frac{dx}{4+x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4+x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4+x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.

د واریابلوx او y د اکسپوننتو یا په جګګنیونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دیفرنځیالمساوات د هوموجینواووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینښوونی یا بدلون له لارې خان اوبیوني یا حل ته پرېږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.
(د) په ځاي اینښوونه مو یوه مساوات ته بیايي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x.z$ او په ورته یا همدې

توګه $y^2 = x^2.z^2$ سبستیچیوشن کو.کله چی ترم $y = x.z$ د خلقاعدې سره

دفرنځیالیږي، نو د dy لپاره بیا $z.dx + x.dz$ یږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د

فرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.په کوم کی چی د x^2 سره خانله شي او

د x , dx همداسی z , dz سره غږي د بڼیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 \quad + y^2 \quad + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بیلګه : $x^2.dx + y^2.dx + xydy = 0$

اوبی یا حل : اوبی په څلورو پلونو کی پلی کوو

١ – په مساوات کی بدلون منځ راولو یا سبستیچیوشن کوو

$y = x.z \quad => \quad y^2 = x^2.z^2$

$dy = z.dx + x.dz$

$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz\,(z.dx + x.dz) = 0$

$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$

$dx(1 + 2z^2) = -x.z.dz$

$dx / x = -(z.dz)/(1+2z^2)$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د

دیفرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

٣ – د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

د اینتیګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (\frac{1}{2}) \ln(a^2 + x^2)$ اوبی راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیگرایشنثابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو خل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپوننشلمساوات په څیر لیکل کیږي.
بیا x ریښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.
د $c = e^{4(c_2 - c_1)}$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.
هغه f چې وروسته لاس ته راځي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0{,}5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}(c - 0{,}5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c - 0{,}5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{1}{x}\sqrt{c - 0{,}5x^4}\right\rangle}}$$

بیلګی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخی dy / dx جوړوو او ړدو $dy = z.dx + x.dz$.اوس د بنیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیګرالیږي.د اینتیګر- یشنشابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle}}$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

سره dy/dx جوړوو او ږدو $dy = z.dx + x.dz$.

د مساوات ښه بدلون سره x,dx همداسې z,dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بیلولو وروسته مساوات اینتیګرالیږي.

$$(x^2 + y^2)\,dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z(z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په ځاي y^2/x^2 ځاي په ځاي کیږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c ږدو.

لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوړې دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c} \rangle}$$

بیلگه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په ځای ایښوول $y = x . z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې سره dy / dx جوړوو او ږدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د ښي بدلون له لارې x,dx همداسی z, dz په دواړو لوروخانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته مساوات ایتیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ږدو او ایتیګریشنثابتی رایوځاي کوو.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$
$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

د مساوات د y پسی اوبی مو ټولیز اوبي f ته بیایي.

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle$$

بیلگه ۴ : $y' . (y - x) = y$

(د) په ځاي ږدو $y = x.z$ ،

د خلقانون سره dy / dx جوړوو.

مساوات بښیبدلون سره $x.dx$ همداسی z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اووښتونو ځانلوني وروسته دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لري

$$\int [f'(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$
$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z}\, dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z}\, dz = 0$$

(د) په ځایونه y = x. z

د z = y / x اینبوونی سره په

څټ راګرځول کیږي.

ورپسی اوبیونه مو فنکش-

برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي

ایمپلیلیځیت انځوریدلی شي.

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2\cdot\ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1+c_2)}$$

$$\blacktriangleright\ e^{-2(c_1+c_2)} = c$$

$$\underline{\underline{y^2 - 2xy = c}}$$

۱ . ۲ . ۳ لاینی دیفرنځیال مساوات

د لمړي نظم لاینی دیفرنځیالمساوات

لاندې ، هغه مساوات پوهیږو، چی y

او 'y په ۱ – ام ګراد کی ، دا په دې

مانا چی لاینی وي، ولري.دا شرطونه

داوبنتونکي x لپاره باور نه لري.

دلته F(x) او f(x) د x فنکشنونه

یا بلواك دي او یا ثابتی.

$$\textit{allgemein:}\ \frac{dy}{dx} + y\cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:

- $y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y'\cdot x = x\cdot\sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4\cdot y$

د لاینی دفرنځیالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی همغه ارزښتیز

متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبیونه

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۱ – سبستیچیوشنو y = u(x).v(x) له

دي څخه دخلقاعدې له لارې لاس ته راځي

$$\blacktriangleright\ y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

د y او 'y لپاره ارزښتونه په دفرنځیا-

لمساوات کي کیښوول کیږي

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x)\cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۲ – لومړی $u(x)$ همداسی $v(x)$ له نوکانو راوځي

۳ – د $u(x)$ همداسی $v(x)$ لپاره د ځنکشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چي نوکترم $[dv / dx - (2/x)v(x)]$ او له دې سره د u خلووني یا فاکتور صفر کیدی شي .

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د $v(x)$ لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چی x^2 په مساوات کي کیښوول شي.له $v(x)$ سره چی ځل $u(x)[dv/dx - 2v(x) / x]$ په صفر برابر شي یو پاتی غړی راکوي، له کوم سره چي du همداسی x,dx په دواړو خواو ځانله کیدی شي.

۴ – له پاتی غړي ځخه $u(x)$ د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

۵ – په وتلمساوات $y = u(x).v(x)$ کي راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :

$u(x) = -(1/x)-(½x^2)+c; v(x) = x^2$

لاس ته راوړنه يي د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v(x) = 0$$

$$\frac{dv}{v(x)} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = 2 \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = 2 \cdot \ln|x| + c_2$$

$$\ln|v(x)| = \ln x^2 + c_2 - c_1$$

$$v(x) = x^2 \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$v(x) = x^2$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x} \blacktriangleright v(x) = x^2$$

$$u(x) \cdot \quad 0 \quad + x^2\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x^3}$$

$$\int du = \int \frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x) = -\frac{1}{x} + c_1 - \frac{1}{2x^2} + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 + c_2 = c$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$= \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c\right) \cdot x^2$$

$$= -x - \frac{1}{2} + cx^2;\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto cx^2 - x - \frac{1}{2} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

همدا بیلګه به اوس ددوم یعنی
لاګرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - خاي په خاي کوو $F(x) = 0$ او راپاتی پاتی مساوات $y' - y.f(x) = 0$ د ورسره بلدمتود د اوبښتونکو بیلولو له لاري اوبی کوو. د اینتیګریشن ثابطی پهخاي، چی ګټور دی لوګاریتم ټاکو، چی دا لو- ګاریتم بیا له منځه ځی. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجین مساوات $y' - y.f(x)$ کی ثابته نه ده، بلکه د x یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د y لپاره د ځل یا ضرب قاعدي له لاري دیفرنځیالیږي.

۳ - د y او y' دواړه توته اوبیونی په سرچینز مساوات کی خاي په خاي کیږي او مساوات و $dC(x) / dx$ پسی اوبی کیږي.

۴ - د اینتیګرالولو لا لاري $C(x)$ لاس ته راوړ لکیږي.

۵ - په مساوات $y = x^2.C(x)$ کي د $C(x)$ لپاره ارزښت کیښول کیږي او مساوات ساده کیږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k\in\mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k\cdot x^2;\ k\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto kx^2 - x - \frac{1}{2} \,\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوات y' - ay = x د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پهٔ ځای اینښوونی (سبستیټیوشن) y = u.v له لارې او مناسب رابیلیدنی ته
dy / dx=u.(dv/dx)+ v(du/dx)

ب – u(x) له نوکانو راوځي

پ– په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه v(x) ټاکل کیږي.

$$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a\cdot u(x)\cdot v(x) = x$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a\cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$$

$$\frac{dv}{dx} - a\cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a\cdot\int dx$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln|v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax+c_2-c_1}$$

$$= e^{ax}\cdot e^{c_2-c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

ت – د v(x) لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي.

د اینتیګرال اوبی د ټوټه اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.

ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات y = u.v کی کینبوول کیږي.

لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبي دی

$$u(x)\cdot[0] + e^{ax}\cdot\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}}\,dx$$

$$u(x) = -\frac{ax+1}{a^2\cdot e^{ax}} + c$$

$$y = u(x)\cdot v(x) = \left(-\frac{ax+1}{a^2\cdot e^{ax}} + c\right)\cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c\cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto c\cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right\rangle$$

الف – د لاگرانژ پسی ښی لور
په صفر مساوي گیښول کیږي
او dx همداسی dy, y په دواړو
لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات $dy / y = a.dx$
اینتیگرالیږي، د y پسی بڼه–
بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

ب – د y لپاره برابرون د ځل–
قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.
پ – د y او 'y لپاره ټوټه اوبیوني
په پیلبرابرون کی کیښول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x)
پسی اوبی کیږي له دې سره
$a.e^{ax} . C(x)$ له منځه ځي
ت ۰ ارزښت C(x) د اینتیگر–
الولو له لارې لاس ته راځي

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه
په مساوت
$y = u(x)\ v(x)\ e^{ax} .C(x)$
کی ږدو
نتیجه د لاگرانژ پسی تولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

$$y' \qquad -a \cdot y \qquad = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax};\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) اوy
او'y په دفرنځیالبرابرون کی پړدو

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\,\frac{dv}{dx} + v(x)\,\frac{du}{dx}$$

$$u(x)\,\frac{dv}{dx} + v(x)\,\frac{du}{dx} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر پړدو اوv شمیری.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی.
v(x)(du/dx) = sin x

$$\int \frac{dv}{v(x)} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي:
v(x) = 1 / x

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^{c} \blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د
اینتیګرالولوله لارې ټاکل کیږي

$$v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x\cdot\sin x\,dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\ k\in\mathbb{R}$$

په (x). y = u(x) کی لاس ته
راوړل شوي ارزښتونه د u اوv
لپاره ځاي په ځاي کړی.
لاس ته راوړنه د برنولي پسی
د ورکړ شوي مساوات ټولیز
اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

بیلګه : مساوات $y'+y=e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبې کړی.

$F(x)=e^{-x}=0$ ږدو او پاتې- مساوات د اووښتونو د بیلولو له لارې اوبې کوو.

$$y'+y=e^{-x} \blacktriangleright e^{-x}=0$$
$$\frac{dy}{dx}+y=0$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په څیر کینبوول کیږي $c-c=\ln|c(x)|$ او y تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y|+c_1=-x+c_2 \blacktriangleright c_2-c_1=\ln|c(x)|$$
$$\ln|y|=-x+\ln|c(x)|$$
$$y=e^{-x}\cdot c(x)$$
$$=u(x)\cdot v(x)$$
$$y'=\frac{dc(x)}{dx}\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کینبوول کیږي او $c(x).e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي.
د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\begin{array}{c} y' \qquad\qquad + \qquad y \qquad = e^{-x} \\ \frac{dc(x)}{dx}\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}+e^{-x}\cdot c(x)=e^{-x}\end{array}$$
$$\int dc(x)=\int dx$$
$$c(x)+k_1=x+k_2 \blacktriangleright k_2-k_1=k$$
$$c(x)=x+k;\ k\in\mathbb{R}$$

په مساوات $y=e^{-x}.(x)$ کې $c(x)$ کینبوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y=e^{-x}\cdot c(x) \blacktriangleright c(x)=x+k$$
$$=e^{-x}(x+k);\ k\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x\cdot -e^{-x}(x+k)|k\in\mathbb{R}\rangle}}$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوبنتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړی

1. $y'=\frac{y}{2a}$	2. $y'=axy$	3. $y'-1=x^2+x^4$
4. $y'-x^3=y-x^3$	5. $\frac{y'}{2x}=y^2$	6. $y'=\frac{y^2}{x^2}$

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \dfrac{b^2x}{a^2y}$

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,\mathrm{d}y + xy \cdot \mathrm{d}x = 0$

13. $y' = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+1)}$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$

21. $\mathrm{d}x(e^y + e^{-y}) = \mathrm{d}y(e^x + e^{-}$

22. $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 = x^2y^3$

23. $(x+y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \mathrm{Arcsin}\, y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\dfrac{\mathrm{Arsinh}\, x}{\mathrm{Arcosh}\, y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره لاندې دفرنځیالمساوات اوبې کړی

1. $y'x = -(x+y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = y'$

7. $\mathrm{d}y \cdot x = (y - x)\,\mathrm{d}x$

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$

9. $(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2y'$

11. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

13. $x \cdot \mathrm{d}y - y \cdot \mathrm{d}x = y \cdot \mathrm{d}y$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot \mathrm{d}x - 3x^2 \cdot \mathrm{d}x + 2xy \cdot \mathrm{d}y = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot \mathrm{d}x + \sqrt{4xy} \cdot \mathrm{d}y = x \cdot \mathrm{d}y$

19. $\dfrac{2y(y-x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنخيالمساوات

لاندې ديفرنخيالمساوات د برنولي او لاګرانژ متودونو سره اوبې کړی.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دويم نظم ديفرنخيالمساوات

د دويم نظم ديفرنخيالمساوات لاندې يو مساوات پوهيږو، چې $y'' = d^2y / dx^2$ د خورا جګ دفيرنخيالکوشنت يا دفيرنخيالويش په څير ولري، د دې ترڅنګ کيدی شي $y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.

د ديفرنخيالمساواتو په دې پيلونی په چاپيريال کی کيدی شي ، چی لنډ يو څو د دويم نظم ديفرنخيالمساوات او د هغو کارونه يا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنی ديفرنخيالمساوات

بېلګه:

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y''\,dx = \int -\sin x\,dx$$

$$y' = \cos x + c_1\,;\; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y'\,dx = \int \cos x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \underline{\underline{\sin x + c_1 x + c_2\,;\; c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1\,;\; c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

د اوبيونی تلنه: د رابيليدنی د له منځه ورلو د اوبيوني پرينځيپ ډيرواره اينتيګرالول دي.

الف: د برابرون دواړه لوري اينتيګراليږي

۲ – راپورته شوي دفرنخيالمساوات بيا اينتيګراليږي.

۳ – په ورکړ شوي حالت کې له شرايطو c_1 او c_2 وټاکی

بيلګی:

لمړی – $y'' = 1/(1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y لاس ته راځی اوله دې سره د f تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$
$$\int y'\,dx = \int \operatorname{Arctan} x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$
$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 = c_2$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_5, c_4, c_3 د اینتیګر– یشنثابتی c_1 ته یوځای کیږي

دویم اینګریشن y راکوي

ثابتی c_9, c_8, c_7, c_6 د اینتیګریشن ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$
$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$
$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$
$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$
$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$
$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$
$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$
$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$
$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$
$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

د جگ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توگه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

لمړی اتیگرالونه "' y رااکوي، دومه - "y دریمه- 'y او څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره رایوځاي کیږي

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2}c_1 \cdot \int x^2\,dx + (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6}c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 + (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

$k_1 = c_1$
$k_2 = c_2 + c_3$
$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$
$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$
$k_1 ; k_2 ; k_3 ; k_4 \in \mathbb{R}$

د لته f د ټولیز اېيفنکشن دی

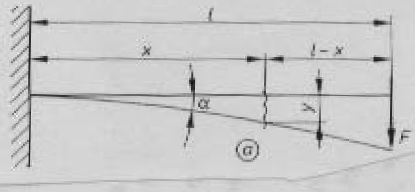
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \rightarrow \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلگه : یوه یولوریز غزول شوي باوړونی کړون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیه‌وله پریوتلی زور یی F دي له میخانیك څخه د کړون شمیرنی برابرون څرگند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کړون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کړومومنت دی $-F(l - x)$

M = کړونمونت

E = د نرموالی- یاالاستیخیتي مودول

l = د هواري وړونمومنت



د اینتیګراولو له لارې"y په 'y اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \qquad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دویم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرایطو څخه شمیرل کیږي. د $x = 0$ په ځاي کی جګوالی 'y هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

für $x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

دویم اینتیګرولول مود یفرنشلبررابرون ته بیایي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,\mathrm{d}x - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرځونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

für $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\underline{\underline{y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}}$$

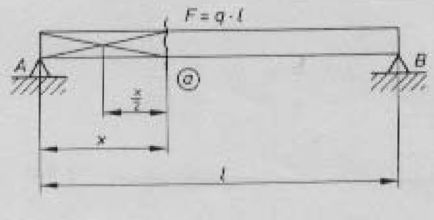
ماکسیمال ګرځونه د $x = l$ سره پرته ده. y_{max} د $x = l$ ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي .

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \left\langle x \cdot - \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle}}$$

für $x = l \Rightarrow y_{max} = \underline{\underline{\frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}}}$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګرځون وشمیرئ، د لیکي بار q سره .
د تیر په یوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی دی ، نو پرتی هر A او B هر یو یی د ټول بار نیمی دي.



$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنځيالمساوات کي کيښول کيږي.

د" y لپاره برابرون د اينتيګريشن سره و' y ته بيرته بيول کيږي

په x = l / 2 ځاي کی هغه لوي کږون مخ ته پروت دی، دا په دې مانا چی په دې ځاي کی تنجنت د کږونکربنی سره پرته يعنی افقي پرته ده، جګی يا جګوالی y ' = 0 مساوي په صفر دی.

د c_1 لپاره راپيداشوی ارزښت په برابرون ' y کی ايښول کيږي.د' y د بيا يا نوي اينتيګرلوني سره فنکشن y تاکل کيږي.
د x = 0 په ځاي کی راګږون y = 0 دی، د دې سره تابته $c_2 = 0$ ده.

د x = 1 / 2 لپاره هغه خورا لوي کږون y_{max} مخ ته لرو دی، چی د ½ اينښوولو سره د خورا لوي کږون فرمول لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \, dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

für $x = \frac{l}{2}$ wird $y' = 0$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{\cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \, dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

Für $x = 0$ wird auch $y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

د $y'' = f(y)$ فورم یا بنې دیفرنځیال مساوات

بېلګه Beispiel:

$$y'' = ay \blacktriangleright y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z\,dz = a \cdot \int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5$$

او بیوونکنه *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy}.$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي او z شمیرل کیږي.

۳ – او بیا ورپسی د واریابلی د ځانلونی متود له لاري شمیرل کیږي.

د اوبیونی په څیر ایمپلیخیت فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګې: Beispiele:

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \blacktriangleright y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2} \int dy$$

د مساوات اینتیکریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

وریسی د اووښتونی د خانلونی متود له لارې شمیرل کیږي

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a}\sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2}(ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4}(x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4}(x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

د لته f ټولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f = \left\langle x, \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}(x + c_6)^2 - c_3\right]\right\rangle$$

2. $y'' = -\frac{1}{2}\sin y$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2}\sin y \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z\,dz = -\frac{1}{2}\int \sin y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2}\cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د دفرنخیالمساوات اوبیونه مو یوه نااوبیووني (نامنحل) اینتیگرال ته بیایي.

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang : اوبيونلار

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲ – راپورته شوی مساوات اینتیګرال کیږي او په z پسی ترتیبیږي

۳ – دلته z اوبی کیږي، بیا اینتیګرالول يي د دیفرنځیال- مساوات ټولیز اوبیونه لاس ته راځي.

Beispiele : بېلګې :

1. $y'' = y'^2$

Beispiel : بېلګه :

$$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax+c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax+c_3} dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a} e^{ax+c_3} + c_4}} \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle}}$$

$$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{c_6 - \ln|x + c_3|}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle}}$$

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\operatorname{Artanh} z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = \underline{\underline{c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|}}$$

د لته f د تولیز اګیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|\rangle}}$$

تمرینونه

۳۱ . د دوم نظم دفرنخیالمساوات

لاندې دفرنخیالمساوت اوبی کړی

1. $y'' = \frac{1}{x}$ 2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ 3. $y'' - x^3 = 0$

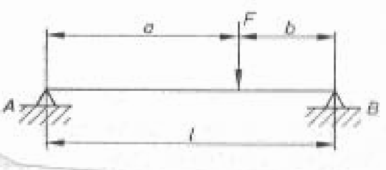
4. $y'' = x + \sin x$ 5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ 6. $y'' = \tan x$

7. $y'' = \sinh x$ 8. $y'' = e^{x^2}$ 9. $y^{(4)} = \cos x$

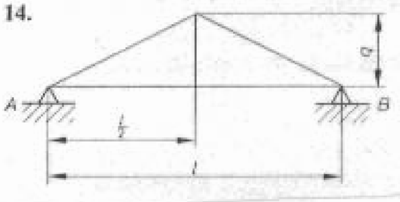
10. $y''' = e^x$ 11. $y^{(4)} = \sinh(2x)$ 12. $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کږون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کږوونی مساوات د لاندې بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

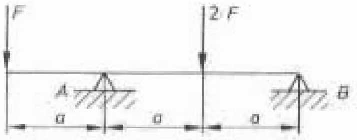
13.



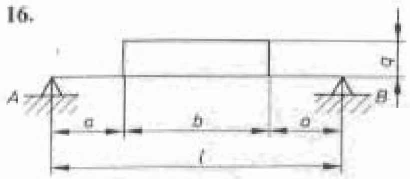
14.



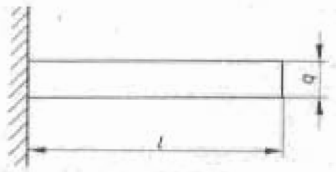
15.



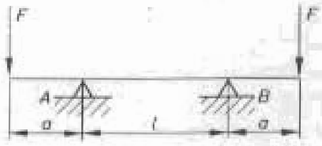
16.



17.



18.



لاندې دفرنځيالمساوات اوبې کړی

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^{y}$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \frac{1}{y}$

23. $y^3 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمي تمرینونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\underline{\underline{e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4}}$$

$c_2-c_3+c_4=c$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int(y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$c_2+c_3=c$

$$y=\underline{\underline{\frac{1}{6}x^3+c_1x+c}}$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx$$

$$y=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sin x+c}}$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \quad \blacktriangleright\ y'=z;\quad y''=z'$$

$$x\cdot z'=3z$$

$z'=\dfrac{dz}{dx}$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3\,dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + c}}$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{y}\,dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\ln^2 x = \ln y$$

$$y = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}\ln^2 x} + c}}$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1)\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{c - x^2}}}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2)\,dx$$

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$\underline{\underline{y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c}}$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\cos x - e^x + c}}$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{x^2 + 2x + c}}}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبیونه د y پسی اوبیور نه دی،
له دې امله ایمپلیځیت اوبیونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\underline{\underline{\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c}}$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$\underline{\underline{y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c}}$$

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \| :2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + c}}$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\, dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{x - \sin x + c}}$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$- \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$c = 4c_1$$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$\underline{\underline{y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}}}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنځیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول شي، پیژندل کیږي چې دفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\, dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} - x + c}}$$

16. $e^x \cdot y' = y$

ساده د y = 0 پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورې کارونی لپاره دې y ≠ 0 نیول شوی وي

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$ پارتیکولار اوبیونه

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-e^{-x}+c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{-(e^{-x})}}}$$

$c = e^{c_1}$

د c = 0 سره پارتیکولار- یا توټه اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7\int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int\left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right)dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{7}{20}x^5 + c_1x + c_2}}$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\,dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

$$\int \mathrm{d}y = \int (-\cos x + c_1)\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{y = -\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = 3x - a$$

$$\int \mathrm{d}y' = \int (3x - a)\,\mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int \mathrm{d}y = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right)\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

<u>Partikuläre Lösung</u> پارتیکولار اوبیونه

$\underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ = ثابته

سملاسی $y = a = \text{const}$ د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسی اوبیونی لپاره تیك د $y'|= 0$
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دې مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{y} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y'}{y'} = \int \mathrm{d}x$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

$e^{c_1^*} = c_1$

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^x$$

$$\int dy=\int c_1\cdot e^x\,dx$$

$$y=c_1\cdot e^x+c_2$$

په روښانه توګه د $C_1 = C_2 = 0$
همداسې د $C_1 = 0$ سره پورتنی
پارتیکیولار اوبی په تولیز اوبي
کی دننه یا خوندي دی.

21. $y''=x\cdot\cos x$

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot\cos x$$

$$\int dy'=\int \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv_1}$$

$$y'=x\cdot\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int(x\cdot\sin x+\cos x+c_1)\,dx$$

$$y=\int \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{dv_2}+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+\sin x+c_1x+c_2$$

$$=2\sin x-x\cdot\cos x+c_1x+c_2$$

۱ . ۲ د لمړي نظم دیفرنځیالمساوات ته تمرینونه

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووبنتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

$\underline{\underline{y=0}}$ :: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$c = e^{c_1}$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{x}{2a}}}}$$

پارتیکیولار اوبیونه په ټولیز اوبی هم دننه دي(C = 0)

2. $y' = axy$

$y=0$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x\, dx$$

$$\ln|y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{a}{2} x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2} x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{a}{2} x^2}}}$$

د c = 0 سره پارتیکیولار اوبیونه په ټولیز اوبیونی کی دننه دی.

3. $y'-1=x^2+x^4$

$$\frac{dy}{dx}=1+x^2+x^4$$

$$\int dy=\int(1+x^2+x^4)\,dx$$

$$y=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+c$$

4. $y'-x^3=y-x^3$

د دي ديفرنځيالبرابرون اوبې د تيرتمرين ۱ څخه د $a = 1/2$ سره، لاس ته راوول کيږي

$$y'=y+x^3-x^3$$

$$y'=y$$

$$y=c\cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x}=y^2$

زيګولار اوبيونه : $y=0$

Voraussetzung: $y\neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y'\cdot\frac{1}{y^2}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2}=2x$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=2\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y}=x^2+c$$

د ديفرنځيالمساوات اوبيونه يو زينګولار اوبې لري.

$$y=-\frac{1}{x^2+c}$$

$$y=0$$

6. $y'=\frac{y^2}{x^2}$

زينګولار اوبيونه: $y=0$

ساده پيژندلکيږي، چې اوبې $y = 0$ ، زيګولار اوبې دی چې دا به وروسته وښوول شي.

Voraussetzung: $y\neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y'\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1 - c \cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1 - c \cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنځيالمساوات اوبی د
تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول
کيدی شي

زيکولارزوبيونه :: $\underline{\underline{y=0}}$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

$$\underline{\underline{b^2 x^2 - a^2 y^2 = c}}$$

اوبی په ايمپليخيته بڼه
(اهرامغوڅی)

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\int dy = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$y = \underline{\underline{2 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c}}$$

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x\cdot y'=y\cdot\ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي (د ln y له امله)، چی y > 0 باید باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسی کارونی لپاره یواځي x ≠ 0 نیول شوی.

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot\ln y$$

نیونه : Voraussetzung: $x\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot\ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y\cdot\ln y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq\ln y.$$

$$\int\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=e^{c\cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، چی له دې امله دا ټولیز اوبی دی.

پارتیکولار اوبیونه : $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0 سملاسي پیژندل کیږي .ددیفرنځیالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی بایدy ≠ 0 ونیول شي او1 - x ≠ 0 دا په دې مانا چی y.(1 - x)²≠0

نیونه : Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$$

$$= \left(e^{\ln|1-x^2|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot \sqrt{|1-x^2|}}}$$

$$e^{c_1} = c$$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتیکیو-
لار اوبې دننه یا خوندي دی.
د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ،
چې $|x| = 1$ اوبې هم دیفرنخیالمسا-
وات پوره کوي، داسې چې دا ټولیز
اوبې انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\sin x + \cos x| + c}}$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$$z = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\, dx$$

14. $y' = e^x \cdot y$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\, dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{(e^x)}}}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه
اوبیونه خوندي ده .

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

زيگولار اوبيونه : $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \quad \blacktriangleright \text{quadrieren}$$ مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c \quad \blacktriangleright \text{für } x \neq 0$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینګولار اوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2\, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$c = 3c_1$

$$y = \sqrt[3]{3x + c}$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}\, dx$$

Koeffizientenvergleich: د ګڼونو انډول

I: $A+B=0$

II: $2A+B+C=0$

III: $A=1$

I: $1+B=0 \Rightarrow B=-1$

II: $2-1+C=0 \Rightarrow C=-1$

$$\int \mathrm{d}y=\int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$$

$$\int \mathrm{d}y=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+c$$

18. $y'=\dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y=\int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3}-\frac{9}{4}\int\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3}-\frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x \quad \|\cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3}-9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9}+\frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right]=$$

$$=x\sqrt{(x^2+4)^3}-$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right]+c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9}-\frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9}-\frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9}-\frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(x^2+2)\sqrt{x^2+4}-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

$$y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9}-81\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4}-16\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم ممکن ده.

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$

▶ $x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

پارخیل اینتیگرال

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\downarrow \atop u}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$\ln |y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}}}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$$dx = \ln y\, dy$$

$$\int dx = \int \ln y\, dy$$

$$x = \underline{\underline{y(\ln y - 1) + c}}$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چی دواړه اینتیگرالونه برابر فورم
لري بسیا کوي ،چی یو وشمیرل شي
بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \operatorname{Arctan} t + c$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{Arctan} e^x + c}}$$

اوبی په ایمپلیخیتفورم

$$\underline{\underline{\operatorname{Arctan} e^y = \operatorname{Arctan} e^x + c}}$$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

دریمه ریښه یی راوستل کیږي.
یا یی ۳ . جذر نیول کیږي

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

پارتیکولار اوبیونه: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$ نیونه :

$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$

$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$

$\ln|y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c_1} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}}}}$

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$z = x + y; \quad y = z - x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - 1$

$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$

$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$

$\frac{dz}{z^2+1} = dx$

$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$

Arctan $z = x + c$

$z = \tan(x+c)$

$x + y = \tan(x+c)$

$\underline{\underline{y = \tan(x+c) - x}}$

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ينګولاراو نيونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نيونه

$\Rightarrow$ په y' ويشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$$

$$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$c = 2c_1$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x + c}$$

$$y = a = \text{const.}$$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$$y'^2 = x^2 + 2x$$

$$y' = \pm\sqrt{x^2 + 2x}$$

$$= \pm\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$$

$$= \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$\int dy = \pm\int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$$

سبستيچيوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$$y = \pm\int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$= \pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|\right] + c$$

$$\underline{\underline{y = \pm\frac{1}{2}\left[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x} - \right.}}$$

$$\underline{\underline{\left. - \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|\right] + c}}$$

26. $y' \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$

پارخیل (ټوټه-) اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$$

$$\int \underbrace{\operatorname{Arcsin} y}_{u} \underbrace{dy}_{dv} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \operatorname{Arcsin} y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

په ایمپلیځیته بڼه اوبیونه

$$y \cdot \operatorname{Arcsin} y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$\underline{y=0}$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیوڼه

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}}}$$

د c = 0 سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارځیل اینتیگرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int\cosh y\cdot dy = \int\underset{\substack{\downarrow\\u}}{x}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int\cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \underline{\underline{\operatorname{Arsinh}\,[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]}}$$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

پارځیل یا پارشل اینتیگرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y}$$

$$\int\underbrace{\operatorname{Arcosh} y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int\underbrace{\operatorname{Arsinh} x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \int\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\underline{\underline{y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + c}}$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا– لمساوات نه دي، مگر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پریږدي، چې د سبستیچیوشن y = x.z له لارې اوبی شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$

$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$

$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$

$x \neq 0$: ویشنه اجازګړی x پس په

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$

$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$

$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$

$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$

$$x^2 + 2yx = c$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$\underline{\underline{y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0}}$$

$\underline{\underline{y=0}}$ :: پارتیکولار اوبیونه

2. $y' \cdot x = y$

نمونه: Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

دا دیفرنځیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبی کیدی شي.

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\underline{\underline{y = c \cdot x}}$

په دې اوبیونوکې پارتیکیولاراوبیونی خوندي دي (د $c = 0$ سره) اود $x = 0$ لپاره هم ، دا په دې مانا، چې دا ټولیز اوبی دی.

3. $y' = \frac{x+y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$

د وظیفي ورکوني سره سم لاسی $x \neq 0$ ورکوي

$z = \frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\, dx$

$x \cdot dz = dx$

$dz = \frac{dx}{x}$

$\int dz = \int \frac{dx}{x}$

$z = \ln|x| + c$

$\underline{\underline{y = x(\ln|x| + c)}}$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$z = \frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\, dx$

$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\, dx$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1 + z^2)\, dx$

$x \cdot dz = (1 + z^2)\, dx$

$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$

$\operatorname{Arctan} z = \ln|x| + c$

$\tan(\operatorname{Arctan} z) = \tan(\ln|x| + c)$

$z = \tan(\ln|x| + c)$

$\underline{\underline{y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)}}$

د $x \neq 0$ لپاره

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$

$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$

نیونه: $x \mid= 0$ له دې امله په x^2 ویش

$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$

$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$

$z \cdot x \cdot dz = -dx$

$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$

$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$

$c = 2c_1$

$= c - \ln x^2$

$z = \frac{y}{x}$

$y = \pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظیفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس $y \mid= 0$ او $x \mid= 0$ باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$

$xyy' = x^2 + y^2$

$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$

$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$

$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$

$z \cdot x \cdot dz = dx$

$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$

$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$

$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln|x| + c$

$y = x(c - \ln|x|); \quad x \neq 0$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظیفي ورکړې شخه روښانه ده، چې همدا اوس $x \neq 0$ لاس ته راځي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \mathrel{\hat=} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\,dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)$

$y = x \cdot \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$

$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\, z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

اوبیونی یواخي په ایملیخته
بنه یا فورم ورکړ شوی دی.

د $x \neq 0$ لپاره

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$$y=z\cdot x \Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan}\, z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\text{Arctan}\, z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

د $x \neq 0$ لپاره

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

د اینټګرال اینټګرالونه

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,\mathrm{d}z$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کیږي

د ضریبونو پرتله:

$$\begin{aligned}
&\text{I:}\quad A+B+C=-1\\
&\text{II:}\quad -B+C=0\\
&\text{III:}\quad -A \quad =3;\ \underline{\underline{A=-3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{I:}\quad -3+B+C=-1\\
&\qquad \left.\begin{aligned} B+C&=2\\ -B+C&=0\end{aligned}\right\}+ \quad \text{II:}\\
&\qquad 2C=2;\ \underline{\underline{C=1}}
\end{aligned}$$

$$\text{II:}\quad -B+C=0;\ \underline{\underline{B=1}}$$

$$x(3-z^2)\,\mathrm{d}z=(z^3-z)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,\mathrm{d}z=\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3-z^2}{z^3-z}&=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}\\
&=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}\\
&=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}\\
&=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}\\
&=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}\\
&=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,\mathrm{d}z=\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z=\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$\mathrm{e}^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=\mathrm{e}^{\ln|x|+c_1}$$

$$=\mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot\mathrm{e}^{c_1}$$

$$\mathrm{e}^{c_1}=c$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^3}\quad \Big\|\cdot x^2$$

$$\underline{\underline{y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0}}$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

12. $y'=\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{x}=z$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\cdot\ln z$$

$$x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x=z\cdot\ln z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z=z(\ln z-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$y=x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0$$

13. $x\cdot \mathrm{d}y-y\cdot \mathrm{d}x=y\cdot \mathrm{d}y$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$$

$$(x-y)\,\mathrm{d}y=y\cdot \mathrm{d}x$$

$$(x-x\cdot z)(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)=x\cdot z\cdot \mathrm{d}x$$

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x ویش

$$(1-z)(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)=z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x-zx\cdot \mathrm{d}z-z^2\cdot \mathrm{d}x=z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x(1-z)\,\mathrm{d}z-z^2\cdot \mathrm{d}x=0$$

وروستی نیونی :: $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1-z}{z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{1}{z}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \|\cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$z=\frac{y}{x}$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$\mathrm{d}y(x^2-xy)=-y^2\cdot\mathrm{d}x$$

$$(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot\mathrm{d}x$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)(1-z)=-z^2\cdot\mathrm{d}x$$

$$x(1-z)\,\mathrm{d}z+(z-z^2)\mathrm{d}x=-z^2\,\mathrm{d}x$$

$$x(1-z)\,\mathrm{d}z=-z\cdot\mathrm{d}x$$

وریسی نیونی : $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)\mathrm{d}z=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

15. $y^2\cdot\mathrm{d}x-3x^2\cdot\mathrm{d}x+2xy\cdot\mathrm{d}y=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$

$$0=(y^2-3x^2)\,\mathrm{d}x+2xy\cdot\mathrm{d}y$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,\mathrm{d}x+2x^2\cdot z(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,\mathrm{d}x+2z(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)$$

$$0=(3z^2-3)\,\mathrm{d}x+2xz\cdot\mathrm{d}z$$

$$-3(z^2-1)\,\mathrm{d}x=2xz\cdot\mathrm{d}z$$

$$-3\,\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$\int\frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$-3\ln|x|=\ln|z^2-1|+c_1$$

$$\mathrm{e}^{-3\ln|x|}=\mathrm{e}^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$\mathrm{e}^{c_1}=c_2$$

$$\mathrm{e}^{\ln|x^{-3}|}=\mathrm{e}^{\ln|z^2-1|}\cdot\mathrm{e}^{c_1}$$

$$c=\frac{1}{c_2};\quad z=\frac{y}{x}$$

$$x^{-3}=(z^2-1)\cdot c_2$$

$$z^2-1=\frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=\frac{c}{x^3}\quad\|\cdot x^2$$

$$y^2-x^2=\frac{c}{x}$$

$$y=\pm\sqrt{x^2+\frac{c}{x}};\quad x\neq 0$$

16. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}y=(y+\sqrt{y^2-x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)=(xz+\sqrt{x^2z^2-x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$=(xz+x\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$$x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x=z\cdot\mathrm{d}x+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z=\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|z+\sqrt{z^2-1}|=\ln|x|+c_1$$

$$\mathrm{e}^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|}=\mathrm{e}^{\ln|x|+c_1}=\mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{c_1}}_{c}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z+\sqrt{z^2-1}=c\cdot x$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \|\cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2;\quad x\neq 0}}$$

په ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$x\cdot y'=y\cdot\ln\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot\mathrm{d}y=y\cdot\ln\frac{y}{x}\cdot\mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)=x\cdot z\cdot\ln z\cdot\mathrm{d}x \quad \|:x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x=z\cdot\ln z\cdot\mathrm{d}x$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$x\cdot\mathrm{d}z=z(\ln z-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z\,\hat{=}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\mathrm{e}^{\ln|\ln z-1|}=\mathrm{e}^{\ln|x|+c_1}=\mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$\mathrm{e}^{\ln z}=\mathrm{e}^{c\cdot x+1}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z=\mathrm{e}^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot\mathrm{e}^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

18. $y\cdot\mathrm{d}x+\sqrt{4xy}\cdot\mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}y$

$$y\cdot\mathrm{d}x=(x-\sqrt{4xy})\,\mathrm{d}y$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow\mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x\cdot z\cdot\mathrm{d}x=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)$$

د پوښتنکونی څخه لاس ته راځي، چی تل $4xy \geq 0$ باید باور ولري دا په دې مانا چی $x.y \geq 0$ هم

نیونه: $x \mid= 0$ له دې امله په x ویش

$$z\cdot\mathrm{d}x=(1-2\sqrt{z})(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)$$

$$z\cdot\mathrm{d}x=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z+(z-2z\sqrt{z})\,\mathrm{d}x$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z-2z\sqrt{z}\,\mathrm{d}x$$

نوري نیوځي $\because z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z - \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|z| = \ln|x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln|z| + c$$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln|x\cdot z| + c$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln|y| + c$$

په ایمپلیځیته بڼه اوبیونه

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + c; \quad x\cdot y > 0$$

19. $\frac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2} = y'$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$$0 = (x-y)\,\mathrm{d}y + 2y\cdot\mathrm{d}x$$

$y = x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y = x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x$

$$0 = (x-xz)(x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x) + 2xz\cdot\mathrm{d}x$$

نیونه: $|x| = 0$ له دي امله په x ویش

$$0 = (1-z)(x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x) + 2z\cdot\mathrm{d}x$$

$$0 = x(1-z)\,\mathrm{d}z + (z-z^2+2z)\,\mathrm{d}x$$

$$0 = x(1-z)\,\mathrm{d}z + (3z-z^2)\,\mathrm{d}x$$

$$-x(1-z)\,\mathrm{d}z = (3z-z^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$A=\frac{1}{3};\quad B=\frac{2}{3}.$$

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)dz = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$$\frac{1}{3}\ln|z| + \frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x| + c_1 \quad \|\cdot 3$$

$$\ln|z| + \ln(z-3)^2 = -3\ln|x| + 3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}| + 3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$$e^{3c_1}=c$$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \|\cdot x^3$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2=c;\quad x\neq 0}}$$

20. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

$$dy = \left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx$$

$$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot dz + z\cdot dx = (z+\sqrt{1+z^2})\,dx$$

$$= z\cdot dx + \sqrt{1+z^2}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{1+z^2}\,dx$$

د پوښتنورکووني خخه سملاسي x |=0 ورکوي، چی دا نوربايد فرض نه شي

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2} = c\cdot x$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = c\cdot x \quad \|\cdot x$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2}=c\cdot x^2;\quad x\neq 0}}$$

1. $y'+2xy=\frac{x}{e^{x^2}}$

$$y=u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u=u(x);\quad v=v(x)$$

د برنولي متود له مخې

رامنخ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسې ټاکل کیږي، چې وروسته شمیرنه یې ترممکنې اندازې ساده شي.

۱ – د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+2xuv=x\cdot e^{-x^2}$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx}+2xv\right)}_{=0}+v\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|v|=-x^2+c_1$$

$$e^{\ln|v|}=e^{-x^2+c_1}=e^{-x^2}\cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1=0$

$$\underline{\Rightarrow v=e^{-x^2}}$$

$$u\cdot 0+e^{-x^2}\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}\quad \|:e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=x$$

$$\int du=\int x\,dx$$

$$\underline{u=\frac{x^2}{2}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}}$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2xy=0$$

$$dy=-2xy\cdot dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c\cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = c(x)\cdot e^{-x^2}$$

دا افاده د y' لپاره په دیفرنځیالمساوات اینسول کیږي.

$$y' = c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x) + 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2} \quad \|: e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)$$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

2. $y' = e^x - y$

$$y = u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x - u\cdot v$$

$$\underbrace{u\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln|v| = -x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$v = e^{-x}$$

$$u\cdot 0 + e^{-x}\cdot\frac{du}{dx} = e^x \quad \|\cdot e^x$$

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{2}e^{2x}+c}$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}}}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-x}}}$$

په ديفرنځيالمساواتکي کيږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$\underline{c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k}$$

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$\underbrace{u(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

$$v=e^x$$

$$u\cdot 0+e^x\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^x$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}dx-\int e^{-x}dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}dx+e^{-x}$$

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\left[x(-e^{-x})-\right.$$

$$\left.-\int(-e^{-x})\,dx\right]$$

3. $y'-y=x^2-1$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

وټاکو $c_1=0$

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx$$

دا پورته اینتیګرال د پارشل اینتیګرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$
$$= -(x^2 + 2x + 2) + (e^{-x} + c)e^x$$
$$\underline{\underline{= ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ - دلاگرانج د متود له مخې اوبې :

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln |y| = x + c_1$$
$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$
$$\underline{\underline{y = c(x) \cdot e^x}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$
$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$
$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$
$$c'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$
$$c(x) = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$$

دا ایتیکریشن همدا په برخه ۱ کی اوبی شو

$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$
$$\underline{\underline{= ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

4. $y'=e^{3x}-2y$

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ - د برنولي متود له مخی اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

وټاکه $c_1=0$

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x}\quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}\,dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}}}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخی اوبی

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot e^{-2x}}}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دې کیښوول شي

$$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x) = e^{3x} - 2c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^{3x} \quad \| \cdot e^{2x}$$

$$c'(x) = e^{5x}$$

$$\underline{c(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{5} e^{3x} + k \cdot e^{-2x}}}$$

5. $y' \cdot x = y + x^2 \cdot \sin x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبې

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = u \cdot v + x^2 \cdot \sin x$$

$$u\underbrace{(xv' - v)}_{=0} + xv \cdot u' = x^2 \cdot \sin x$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نیونه: $x \neq c$, په x ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

وټاکی $c_1 = 0$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\underline{u = -\cos x + c}$$

دا اوبې دیفرنخیالمساوات

$$y = u \cdot v$$

د $x = 0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چې دا ټولیز اوبې دی.

$$\underline{\underline{= x(c - \cos x)}}$$

۲ د لاګرانج متود له لارې اوبی

$$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی $x \neq 0$ غوښتل کیږي، اوبی لکه پورته مګر د $x = 0$ لپاره به هم باور ولري.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

په دیفرنخیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

۱ – د برنولی متود له لارې اوبی

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: $x \neq 0$، ځکه په x ویشنه،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left| \frac{1}{x} \right|$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$v=\frac{1}{x}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int du=\int x\cdot\sin x\,dx$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0$$

۲ . د لاګرانژ متود له لارې‌اوبی

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$, خکه په x ویشنه ٔ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

دالاندې

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

$$\int x\cdot\sin x\,dx$$

اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k$$

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k);\quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولی متود له لارې اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$u\underbrace{(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$\ln|v|=-x+c_1$$

$$\underline{v=e^{-x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x\quad\|\cdot e^{x}$$

$$u'=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال

$$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

د ټوټه انتیګرال سره اوبی کیږي

$$F=\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^{x}\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int e^{x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\Big[e^{x}(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e$$

$$F=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x-\underbrace{\int e^x\cdot\cos x\,dx}_{F}$$

$$2F=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+c_1$$

$$F=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+c$$

$c=\frac{1}{2}c_1$

$$u=\frac{1}{3}e^{3x}-F$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+c\cdot e^{-x}$$

۲ - د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځاي په ځاي کړی.

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)+c(x)\cdot e^{-x}+\cos x-e^{2x}=0$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{2x}-\cos x\quad\|\cdot e^x$$

$$c'(x)=e^{3x}-e^x\cdot\cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x)=\int(e^{3x}-e^x\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+k$$

$$y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + k \cdot e^{-x}}}$$

8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$

۱ -د برنولي متود له لارې اوبې

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv = b \cdot e^{cx}$$

$$u\underbrace{(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' = b \cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکو:

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' = b \cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{u = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + c_2}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\frac{b}{a+c} e^{cx} + c_2 \cdot e^{-ax}}}$$

۲ - د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$c_2 = e^{c_1}$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow \underline{\underline{y = c_2(x) \cdot e^{-ax}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځای
په ځای کړی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{c_2(x) = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$\underline{\underline{= \frac{b}{a+c} e^{cx} + k \cdot e^{-ax}}}$$

9. $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv - b \sin cx = 0$$

$$\underbrace{u(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' - b \sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' - b \sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

دا اینتیګرال د ټوټه یا پارشل
اینتیګرال له لارې اوبی کیږي

$$u = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c} \int e^{ax} \cdot \cos cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx +$$

$$+ \frac{ab}{c} \left[e^{ax} \cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c} \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx \right]$$

$$u = -\frac{b}{c}\, e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c^2}\, e^{ax} \cdot \sin cx -$$

$$-\frac{a^2}{c^2} \cdot b \underbrace{\int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx}_{u}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) u = \frac{b}{c}\, e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_2$$

$$1+\frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$\underline{u = \frac{bc}{a^2+c^2}\, e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_3}$$

$$c_3 = c_2 \cdot \frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$y = u \cdot v$$

$$\underline{\underline{= \frac{bc}{a^2+c^2} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_3 \cdot e^{-ax}}}$$

۲ - د لاګرانژ د متود له لارې اوبې

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow \underline{\underline{y = c_2(x) \cdot e^{-ax}}}$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کې دې کیښوول شي

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} - b \cdot \sin cx = 0$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \sin cx \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c_2(x) = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$\underline{= \frac{bc}{a^2+c^2}\, e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + k}$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a^2+c^2}(a \cdot \sin cx - c \cdot \cos cx) + k \cdot e^{-ax}$$

10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس ته راځی $x > 0$

۱ - د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u \cdot v' + v \cdot u' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v' - \frac{v}{x}\right)}_{=0} + v \cdot u' = \frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی:

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x \cdot u' = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$u' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$u = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= \underline{\ln |\ln x| + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x\,(|\ln|\ln x| + c)$$

۲ - د لاګرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$c = e^{c_1}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

په دیفرنځیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= \underline{\ln|\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln|\ln x| + k)}}$$

11. $y' = a + bx + cy$

۱ – د برنولی متوډله لارپاوېی

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ ونا کړه

$$\ln|v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a+bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a+bx) e^{-cx} \, dx$$

$$= a \int e^{-cx} \, dx + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

پارشل اینتیکریشن یا اینتیکراول

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} \, dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$c_2 = e^{c_1}$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{cx}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای
په ځای کړی یا کیږدی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2{}^{(x)} \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a+bx) e^{-cx}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

12. $xy'+1=e^x+y$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$\underbrace{u(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

د دې لاندې اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لړی ودیزینه باندې تیریدنه نه شي کیدی

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u\cdot v$$

$$= c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاگرانژمتود له لارې اوبې

$$xy' - y = 0$$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$c = e^{c_1}$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی.

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیگرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبې شویدی.

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

$$y=c(x)\cdot x$$

$$=k\cdot x+x\cdot\ln|x|+\frac{x^2}{1\cdot 2!}+\frac{x^3}{2\cdot 3!}+\frac{x^4}{3\cdot 4!}+\dots$$

$x\neq 0$

13. $y'(1-x^2)+xy=1$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لاري دا دلته

$$(uv'+vu')\,(1-x^2)+xuv=1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2)+xv]}_{=0}+vu'(1-x^2)=1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2)=-xv$$

نیونه: $|x|\neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{-x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکه

$$\ln|v|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v=\sqrt{|1-x^2|}$$

د وریسی اوبیوني لپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$\|v=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{für } |x|<1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x|>1\end{cases}$$

1. Fall: $v=\sqrt{1-x^2}$; $|x|<1$

$$u\cdot 0+\sqrt{1-x^2}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u=\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$$1-x^2=z^2\Rightarrow dx=-\frac{z\cdot dz}{x}$$

$$=\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$x=\sqrt{1-z^2};\quad dx=-\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sin t\Rightarrow dz=\cos t\cdot dt$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t;\quad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

$$=-\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال

$$=\cot t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}+c$$

$$=\underline{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c}$$

دا اوبې دیفرنځیالمساوات

د $1=|x|$ هم پوره کوي

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{x+c\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\le 1}}$$

<u>2. Fall:</u> $v=\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

$$u\cdot 0+\sqrt{x^2-1}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

Substitution: : سبستیچیوشن

$$x^2-1=z^2\Rightarrow dx=\frac{z\cdot dz}{x}$$

$$x=\sqrt{1+z^2};\quad dx=\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sinh t\Rightarrow dz=\cosh t\cdot dt$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$$

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1+z^2}}$$

$$=-\int\frac{\cosh t\,dt}{\sinh^2 t\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ►، بنسټ اینتیګرال

$$u=\coth t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

$$\coth t=\frac{\cosh t}{\sinh t}$$

$$y=u\cdot v$$

د $|x|\geq 1$ لپاره $=\underline{\underline{x+c\cdot\sqrt{x^2-1}}}$

د ټولو x لپاره $y=\underline{\underline{x+c\cdot\sqrt{|1-x^2|}}}$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x|=1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځاي شي.

۲ - د لاګرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1-x^2)+xy=0$$

نیونه: $|x|\neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln\sqrt{|1-x^2|}+c_1$$

$$y=\sqrt{|1-x^2|}\cdot c$$

$$c=e^{c_1}$$

$$y=\underline{\underline{c(x)\cdot\sqrt{|1-x^2|}}}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y=\begin{cases}c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} & \text{د } |x|<1 \text{ لپاره}\\ c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} & \text{د } |x|>1 \text{ لپاره}\end{cases}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

1. Fall: $y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

$$y'=c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}}+c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+ +xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیکرال همدا اوس په برخه۱ حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+k$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x|=1$ هم پوره کوي

$$y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=x+k\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\le 1$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

2. Fall: $y=c(x)\cdot\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

$$y'=c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}}+ +x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k}}$$

دا ایتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= \underline{\underline{x + k \cdot \sqrt{x^2-1}}} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

$$y = \underline{\underline{x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x}}$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات
د 1 = | x | هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کاروني له لارې و یوه اوبی ته
رایوځای شي.

14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

دپوښتنی څخه 0 =| x ورکوي،
دا په دې مانا چی n·π =| x
د ....2 ± , 1± , 0 = n سره

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x(1-\cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1-\cos x)$$

$$\underbrace{u(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x(1-\cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\cos x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x(1-\cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

سبستیچیوشن (بدلون)

$$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$u' = \sin x(1-\cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x(1-\cos x) e^{\cos x} dx$$

$$= -\int (1-z) e^z dz$$

$$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

پارشل یا توټه ایتیګریشن

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z\,dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z\,dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z(z-2) + c$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x\,dx$$

$$\ln|y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځای په ځای کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x(1 - \cos x)\,e^{\cos x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \sin x(1 - \cos x)\,e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$$
$$=\underline{\underline{\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}}}$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبيونه

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکه

$$\ln|v|=-\sin x+c_1$$
$$v=\underline{e^{-\sin x}}$$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{\sin x}$$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل يا ټوټه ايتيګريشن

$$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}\,dx$$
$$=\int z\cdot e^z\cdot dz$$
$$=z\cdot e^z-\int e^z\,dz$$
$$u=z\cdot e^z-e^z+c$$
$$=e^z(z-1)+c$$
$$=\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+c}$$

$$y=u\cdot v$$
$$=\underline{\underline{\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}}}$$

۲ - د لاګرانج د متود له لارې اوبی

$y' + y \cdot \cos x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$c = e^{c_1}$

$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$

په دیفرنشیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$

$$+ \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \cos x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} dx$$

$$= \underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + k}}$$

$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$

$= \underline{\underline{\sin x - 1 + k \cdot e^{-\sin x}}}$

16. $y' - yx = x^2 - 1$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$

$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot x = x^2 - 1$

$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] + v \frac{du}{dx} = x^2 - 1$

$\left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0$

$v = v(x)$

$\frac{dv}{dx} - v \cdot x = 0$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2}+c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1}; \; c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2-1}{v}$$

$$du = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \; -x \quad + c_2 \; \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ – د لاګرانژ د متود له لاري اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x)\, e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

سر $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ د

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$$ حل اصلا او

د راپاتی مساواتو به $u = u(x)$ د اینتیګریشن له لاري وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه u(x) او v(x) به په برابرون y = u(x).v(x) کی کیښنول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفرنشیالمساوات تولیزه اوبیونه ده

$F(x) = 0$ کیښ د که

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0; \; x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

دا د مساوات $y' - yx = 0$ د اوبیونی
سره لاس ته راغلی اینتیګریشنثابته
د x فنکشن دی
$c_1(x)$ د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.
لاس ته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده،
لکه څنګه چی د برونولی متود له لارې
لاس ته راغلی

$$\mathrm{d}c_1(x)=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,\mathrm{d}x=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int c_1(x)\,\mathrm{d}x=\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{c_1(x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2}$$

$$y=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$=(-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=-x+c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x, -c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle}}$$

17. $y'\cdot x^2+y=x$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$(uv'+vu')x^2+uv=x$$

$$\underbrace{u(x^2v'+v)}_{=0}+x^2vu'=x$$

$$x^2v'=-v$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکو

$$\ln|v|=\frac{1}{x}+c_1$$

$$\underline{v=e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot u'=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u'=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیګرال کیدی شي یوازې
د لړیودیزې له لارې اوبی شي

$$u=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$z=-\frac{1}{x}$$

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\underline{\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x \neq 0$ لپاره

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نيونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ويشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}}$$

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

په ديفرنشيالمساوات کې کېږدی

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اينتيګرال

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

همدا اوس برخه ۱کی اوبې شو

$$=\underline{\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-}$$

$$\underline{-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k}$$

$$y = c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \ldots + k\right)$$

für $x \neq 0$

١ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

18. $y' + \frac{1}{1+x}\,y + x^2 = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

$$\underbrace{u\left(v' + \frac{v}{1+x}\right)}_{=0} + vu' + x^2 = 0$$

د پوښتني كولو څخه همدااوس

ورکوي x |= -1

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاكه

$-\ln|1+x| = \ln|1+x|^{-1}$

$$\ln|v| = -\ln|1+x| + c_1$$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u\cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad \| \cdot (1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = -\int (x^2 + x^3)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$y = u\cdot v$

$c = 12c_2$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

۲ – د لاگرانژ موتود له لاري اوبیونه

$$y' + \frac{1}{1+x}\, y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y| = -\ln|1+x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\ln|1+x| + c_1} = e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot \frac{1}{1+x} \Rightarrow y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{1+x} - c(x) \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x} - \frac{c(x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{c(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$c'(x) = -x^2(1+x)$$

$$c(x) = -\int (x^2 + x^3)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$= \frac{k - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

$k = 12c_2$

19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبیونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$\underbrace{u(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} + vu' = e^{-\sin x}$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکئ

$$\frac{dv}{v}=-v\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$$

$$\ln|v|=-\sin x+c_1$$

$$\underline{v=e^{-\sin x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=e^{-\sin x}\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$u'=1$$

$$\underline{u=x+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{(x+c)\,e^{-\sin x}}}$$

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y'+y\cdot\cos x=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\cos x\,dx$$

$$\ln|y|=-\sin x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\sin x+c_1}=e^{-\sin x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-\sin x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-\sin x}}}$$

په ديفرنخيالمساوات کې کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}+$$

$$+c(x)\cdot e^{-\sin x}\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-\sin x}=e^{-\sin x}\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x)=1$$

$$c(x)=\underline{\underline{x+k}}$$

20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

ورکوي $\cos x \neq 0$

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکئ:

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$= \underline{\underline{(x+k)\,e^{-\sin x}}}$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$u\underbrace{(v' + v \cdot \tan x)}_{=0} + vu' = \sin(2x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \tan x \, dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$v = \underline{\cos x}$$

$$u \cdot 0 + \cos x \cdot u' = \sin(2x)$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$u' = 2\sin x$$

$$u = 2\int \sin x$$

$$= \underline{-2\cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\cos x \cdot (c - 2\cos x)}}$$

– د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' + y \cdot \tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \tan x \cdot dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot \cos x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$$

$$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{\underline{(k - 2\cos x) \cdot \cos x}}$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنځيالمساوات کی کينبوول

۱ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$$

21. $y' - 2y = -x + 3$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

د $u = e^{2x}$

$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0$ سره حل لرو

د لاندې پاتی برابرون څخه د ایتیګرال له لاري

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

v= v(x) تاکل کيږي

$$dv=e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v=\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v=e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2$$

$$y=u(x)\cdot v(x)$$

$$y=e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$$

$$f=\left\langle x\cdot-\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$$

۲ - د لاګرانژ موتود له لاري اوبيونه

$$y'-2y=-x+3$$

$$y'-2y=0$$

$$y=c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2+c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2+c_3'(x)\cdot e^{2x}-2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x}=-x+3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x}=-x+3$$

$$c_3'(x)=(-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x)=\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$=3\int e^{-2x}\,dx-\int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}e^{-2x}-\left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]+c_2$$

د u(x) او v(x) لاس ته راوړي ارزښتونه د y=u(x).v(x) په مساوات کی کیښول کیږي. لاس ته راوړنی د ورکړ شوي دفرنځیالبرابراون ټولیز اوبي دي

ږدو $-x+3=0$ نولرو

$$y'-2y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2\,dx$$

$$\ln y=2x+c_1$$

$$y=e^{2x+c_1}=e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$=c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیګریشنثابتی $e^{c_1}=c_3(x)$ د x فنکشن دی.

د y او y' لپاره دواړه برخاوبیونی په پیلمساوات y' - 2y = -x + 3 کی کیښول کیږي

د اینتګریشن له لاري لویه $c_3(x)$ پیداکیږي

c_3 (۲) په برابرون کی کیښول کیږي
$y=c_3(x)\cdot e^{2x}$

لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه

$$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$$

$$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$$

۱ . ۳ د دوم نظم درفنخیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$

د پوښتنیورکړې څخه لاسته $x\,|=0$ راځي

وروسی اوبیونی ته دې حالتونه $x>0$ او $x<0$ توپیر شي

پارشل یا ټوټه ایتیکریشن

$c_3=c_1-1$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$$

$$y'=\ln|x|+c_1$$

$$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$$

1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$

$$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$$

$$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$$

$$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$$

$$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$$

$$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$$

2. **Fall:** $y' = \ln(-x) + c_1\,; \quad x < 0$

پارشیل یا پارشل اینتیګرال

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\,dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\,dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$c_3 = -1 + c_1$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2\,; \quad x < 0$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ←اړونه: $c_3 \triangleq c_1$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\,dx$$

$$y' = \int f(x)\,dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1\right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\, dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2}}$$

5. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي

ځکه چې $x+\sqrt{1+x^2} > 0$ د ټولو

x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}} dx + c_1 x$$

$$= x[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \underline{\underline{x[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2}}$$

6. $y'' = \tan x$

ددې انتیګرال برابرون اوبیوني

کې په لږبودینه ترېدنه ناشونې ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x\, dx$$

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \dots$$

$$\underline{\underline{y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots}}$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x\, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\sinh x + c_1\cdot x + c_2}}$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتيګرالبرابرون اوبيوني يواځې لړيودينې سره شوني ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2} dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \dots$$

$$\underline{\underline{y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} +}}$$

$$\underline{\underline{+ \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \dots}}$$

9. $y^{(4)} = \cos x$

$$y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \cos x$$

$$\int dy''' = \int \cos x \, dx$$

$$y''' = \sin x + c_1^*$$

$y''' = \frac{dy''}{dx}$

$$\int dy'' = \int (\sin x + c_1^*)\, dx$$

$$y'' = -\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*$$

$y'' = \frac{dy'}{dx}$

$$\int dy' = \int (-\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*)\, dx$$

$$y' = -\sin x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2^* \cdot x + c_3$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$\int dy = \int \left(-\sin x + \frac{c_1^*}{2} \cdot x^2 + c_2^* \cdot x + c_3\right) dx$$

$$y = \cos x + \frac{c_1^*}{6}\, x^3 + \frac{c_2^*}{2}\, x^2 + c_3 x + c_4$$

$c_1 = \frac{1}{6}\, c_1^*; \quad c_2 = \frac{1}{2}\, c_2^*$

$$\underline{\underline{y = \cos x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}}$$

10. $y''' = e^x$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = e^x$$

$$\int dy'' = \int e^x \, dx$$

$$y'' = e^x + c_1^*$$

$$\int dy' = \int (e^x + c_1^*)\, dx$$

$$y' = e^x + c_1^* \cdot x + c_2$$

$$\int dy = \int (e^x + c_1^* \cdot x + c_2)\, dx$$

$$y = e^x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$c_1 = \frac{1}{2}\, c_1^*$

$$\underline{\underline{= e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3}}$$

11. $y^{(4)}=\sinh(2x)$ ► $y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx}\Rightarrow dy'''=y^{(4)}\cdot dx$

$$\int dy'''=\int \sinh(2x)\,dx$$

$$y'''=\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1 \quad ► \; y'''=\frac{dy''}{dx}\Rightarrow dy''=y'''\cdot dx$$

$$\int dy''=\int\left(\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\right)dx$$

$$y''=\frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx+\int c_1\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_2+c_1x+c_3 \quad ► \; c_2+c_3=c_4$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}\Rightarrow dy'=y''\cdot dx$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4\right)dx$$

$$y'=\frac{1}{8}\cosh(2x)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7 \quad ► \; c_5+c_6+c_7=c_8$$

$$=\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8$$

$$y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow dy=y'\cdot dx$$

$$\int dy=\int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$\underline{\underline{y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_4x^2+c_8x+k}}$$

12. $y^{(5)}=\cosh(ax)$ ► $y^{(5)}=\dfrac{dy^{(4)}}{dx}\Rightarrow dy^{(4)}=y^{(5)}\cdot dx$

$$\int dy^{(4)}=\int \cosh(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1=y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}$$

$$\int dy''' = \int\left[\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1\right]dx = \frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_2+c_1x+c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4 = \frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy'' = \int\left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4\right]dx$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8 = \frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy' = \int\left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13} = \frac{dy}{dx}$$

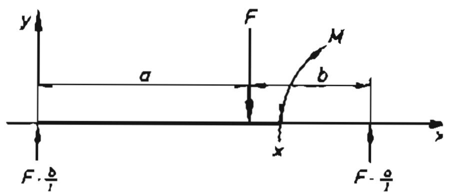
$$\int dy = \int\left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13}\right]dx$$

$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax)+c_{14}+\frac{1}{24}c_1x^4+c_{15}+\frac{1}{12}c_4x^3+c_{16}+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{17}+c_{13}x+c_{18}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax)+\frac{1}{24}c_1x^4+\frac{1}{12}c_4x^3+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{13}x+k}}$$

د مومنتو ټاکلو لپاره باید ورشوګا-
نی یاساحی $0\le x\le a$ او $a\le x\le a+b=l$
توپیر شي

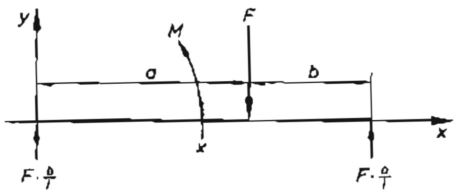
1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو



$$M - F\cdot\frac{b}{l}\cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}} \quad \text{für } 0 \le x \le a$$

2. Bereich: $a \le x \le a+b=l$



$$M-F\cdot\frac{a}{l}\cdot(l-x)=0$$

$$\underline{\underline{M=F\cdot\frac{a}{l}(l-x)}} \quad \text{für } a\le x\le l$$

د ورشو يا تعريفېدېري $0<x<a$ لپاره د کږونلاین y_1 ټاکنه

د دې دواړود هريوه ورشو يا ساحولپاره دې کږونلاین وټاکل شي، چې د $x=a$ لپاره بايد يوځاي ولوېږي.

$$y_1''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx}=-\frac{F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}{E\cdot I}$$

$$\int dy_1'=-\frac{F\cdot b}{l\cdot E\cdot I}\int x\,dx$$

$$y_1'=-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2+c_1$$

$$y_1=\int\left(-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2+c_1\right)dx$$

$$=-\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3+c_1\cdot x+c_2$$

د $x=0$ لپاره کږون 0 دی.

$$y_1(0)=0-c_2=0$$

$$\underline{\underline{y_1=-\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3+c_1\cdot x}}$$

د ورشو يا تعريفېدېري $0<x<l$ لپاره د کږونلاین y_2 ټاکنه:

$$y_2''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI}\int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI}\int z\,dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3\right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځاي پریوځي، دا په دې مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$y_1(a) = y_2(a)$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 y_1 او کی کیښول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI}(l-x)$$

رایوخایون :

$$y=\begin{cases}\dfrac{Fbx}{6lEI}\,[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\[2mm] \dfrac{Fa(l-x)}{6lEI}\,[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

ماکسیمالکېږونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کې داسې پرته وي، چې دفرنځیالیدی شي.

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\,[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}\,(a+2b)$$

د $b<a$ له امله لاسته راځي

$$x_{m_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

$$\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2a)}=a,$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

دا په دې ماناچې $x_m<a$ په x_m کې ماکسیمالکېږون د y_1 ورشوکې پروت دی، چې نورد y_2 کې څېړنې ته باید اړ نه دی.

$$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$$ دلته چې مهم

ماکسیمال کېږون y_{max}

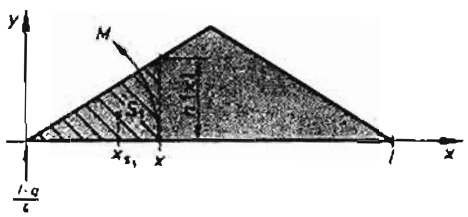
$$y_{max}=y_1(x_m)$$

$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}\,lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}\,(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}\,lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le \frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(½)\,l.q$ دی داسې چې پروتزور په A او B هریو کې $(¼)l.q$ دی



دا کرښې شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.

$$h(x)=\frac{2q}{l}\,x$$

د دروندڼکی پروتمحور x_{S1} کیدی شي بنستهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

د کږونلاین y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره

$$0 \le x \le \frac{l}{2}:$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

د سیومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$$x_m = \frac{l}{2} \text{ mit } y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$$

$$y_1 = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

د سیومتریکی بارونی یا زور له امله کږونلاین و $x = l/2$ ته سیو- متري دی.د y_2 لپاره په ورشو $l/2 \leq x \leq l$ کی په y_1 کی فقط x د $l - x$ سره بدل کړي.

$$y_1 = \frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{qx}{12EI}\left(\dfrac{x^4}{5l} - \dfrac{lx^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{q(l-x)}{12EI}\left[\dfrac{(l-x)^4}{5l} - \dfrac{l(l-x)^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \dfrac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

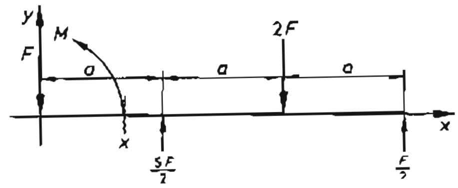
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ - دې ټوبښتنی سره د x لپاره درې ورزوګانی باید توپیر شي

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$ ورشو :



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

د $0 \leq x \leq a$ لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

ژی ارزښت : $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

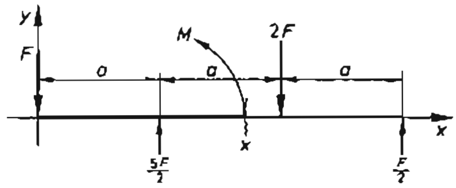
$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1x + c_2$$

$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

2. Bereich: $a \le x \le 2a$: وروستو



$$0 = M - \frac{5F}{2}\cdot(x-a) + F\cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2}(x-a) - F\cdot x$$

$$= \frac{3F}{2}x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2}(3x - 5a)$$

د $a \le x \le 2a$ لپاره کږونلاین: y_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2 - 5ax + c_3\right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3 x + c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

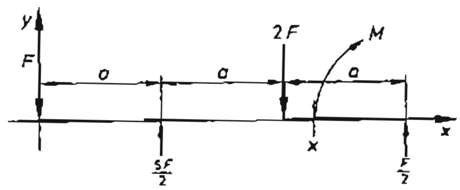
$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3 a + c_4\right)$$

$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3 a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3 a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3(x-a) + 2a^3\right]$$

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ ورستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_1 ، y_2 ، y_3 کی لا دننه ثابتی c_1 ، c_3 ، c_5 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لارې وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3]$$

$$= -\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \qquad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

$$\text{II:} \qquad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I اوII څخه c_3 اوc_3

ساده راپیدا کیږي

$$\text{I+II:} \qquad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$\text{I-II:} \qquad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = -\frac{25}{6}a$$

د c_1 ټاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو

څخه شمیرل کیږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کی د ټولو دري ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکړونی ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندي پراته دي، چی له دي امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کی نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کی کیدی شي ماکسیمالکړون یواځی په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کي رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{\max_1}$$

$$y_{\max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

دلته پامور نه دی ▶ $x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باورورشو $a\leq x\leq 2a$ کی نه دی پروت، چی له دې امله یواځ د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون مو مخ ته پریوتی شي.

$$\underline{\underline{x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})}}$$

$$y_{\max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$

$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{\max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$\underline{\underline{=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)}}$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y-محور په مثبت- یا زیاتونلور رامنځ ته کیږي(دا په دې مانا، چی تراوسه پاس یا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواوردیناتسیستم کی زور F کمون(تفریق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

دلته پامور نه دی ▶ $x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3$

د x_1 − ارزښت نور د y_3 باورورشو کی نه دی پروت، نو ځکه یواځي

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړوون موجود کیدی شي

$$\underline{\underline{x_{m_3} = a\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}$$

$$y_{max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 9a^3\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 25a^3\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21a^3\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 9\left(\frac{29}{3} - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + 25\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54\sqrt{\frac{2}{3}} + \right.$$

$$\left. + 75 - 25\sqrt{\frac{2}{3}} - 21\right]$$

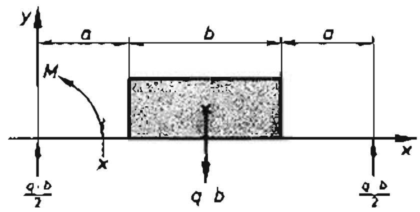
$$= \frac{Fa^3}{12EI} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\underline{\underline{= \frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

۱۶ . د x لپاره درې ورشوګانې توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$: لمړی نعد دوی (ورشو)

$l = 2a + b$



$$0 = M - \frac{q \cdot b}{2}x \Rightarrow M = \frac{q \cdot b}{2}x$$

د $0 \le x \le a$ لپاره کړوونلاین y_1:

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI}x$$

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

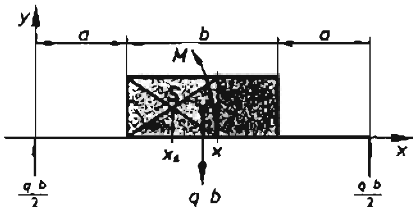
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

اژی ارزښت: $y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\underline{\underline{y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x}}$$

2. Bereich: $a \le x \le a + b$ ورشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

X_2: د $a \le x \le a+b$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2 x + c_3\right]$$

د سیومتري باروېشنی له امله

$$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$$

باور لري، له کوم سره چی c_3 ټاکله کیږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتي c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د یوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

3. Bereich: $a+b\le x\le l$ وروستو

د دې ورشو لپاره کیدی شي کږونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي،څکه چې دا د سیومتری درونډوالي یا بارونی له امله و$x=l/2=(½)(2a+b)$ ته سیومتري دي.

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$$x:\blacktriangleright l-x$$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د ټولو دري ورشوګان په رابندفورم کی د ګړونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases} \dfrac{qbx}{24\,EI}\,(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a \\[2ex] \dfrac{q}{24\,EI}\,[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b \\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24\,EI}\,[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l \end{cases}$$

د سیومتریکي باروېشنی له امله مِاکسیمال راکړونه په لاندې کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\,(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24\,EI}\left[\frac{1}{16}\,(2a+b)^4-\frac{1}{4}\,(2a+b)^4+\frac{3}{2}\,a^2(2a+b)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384\,EI}\,[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$
$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

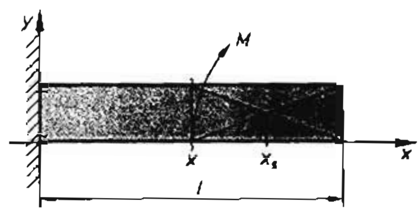
$$=\frac{q}{384\,EI}\,[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$
$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384\,EI}\,[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$
$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384\,EI}\,[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384\,EI}\,(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

17.



$x_s=\frac{l+x}{2}$

$$0=M+q(l-x)\cdot(x_s-x)$$

$$=M+q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$=M+\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M=-\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y''=-\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z=l-x \Rightarrow dx=-dz$

$$y'=\frac{q}{2EI}\int(l-x)^2\,dx$$

$$=-\frac{q}{2EI}\int z^2\,dz$$

$$=-\frac{q}{6EI}z^3+c_1$$

$$=-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+c_1$$

ژی ارزښت: $y'(0)=0 \Rightarrow c_1$

$$0=-\frac{q}{6EI}l^3+c_1;\quad c_1=\frac{ql^3}{6EI}$$

$$y'=\frac{q}{6EI}[l^3-(l-x)^3]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z=l-x \Rightarrow dx=-dz$

$$y=\frac{q}{6EI}\int[l^3-(l-x)^3]\,dx$$

$$=-\frac{q}{6EI}\int(l^3-z^3)\,dz$$

$$=-\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z-\frac{z^4}{4}+c_2\right)$$

ژی ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$y=-\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3-\frac{1}{4}(l-x)^4+c_2\right]$$

$$0=-\frac{q}{6EI}\left[l^4-\frac{1}{4}l^4+c_2\right]$$

$$0=l^4-\frac{1}{4}l^4+c_2;\quad c_2=-\frac{3}{4}l^4$$

$$y=-\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3-\frac{1}{4}(l-x)^4-\frac{3}{4}l^4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4-4l^3(l-x)+3l^4\right]$$

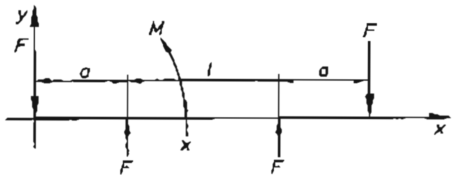
ماکسیمالګرون په ژی ارزښت z = l کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max}=y(l)$$

$$=\frac{ql^4}{8EI}$$

۱۸ . د x لپاره دي بيا دري ورشوګانی توپیر شي.

1. Bereich: $0\leq x\leq a$ ورشو



y_1: د $0\leq x\leq a$ لپاره کرونلاین

$$0=M+x\cdot F\Rightarrow M=-x\cdot F$$

$$y_1''=-\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{F}{EI}x$$

$$y_1'=\frac{F}{2EI}x^2+c_1$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}x^2+c_1x+c_2$$

ژی ارزښت
Randwert: $y_1(a)=0\Rightarrow c_2$

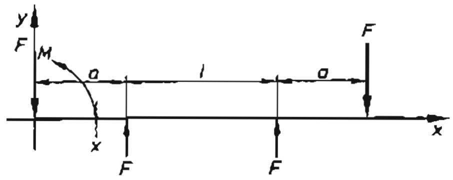
$$0=\frac{F}{6EI}a^3+c_1a+c_2$$

$$c_2=-\frac{F}{6EI}a^3-c_1a$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}(x^3-a^3)+c_1(x-a)$$

ورڪشو

2. Bereich: $a \le x \le a+l$



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$
$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$
$$M = -aF$$

د $0 \le x \le a+l$:y_2 لپاره کړونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$
$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$
$$y'_2 = \frac{aF}{EI}x + c_3$$

د سیومتریکي باروېشنی له امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$
$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$
$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$
$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

ژړی ارزښت
Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$
$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$
$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$
$$= \frac{a}{2}(a+l)$$
$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-
ګینیتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$
له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right] = -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$\underline{\underline{y_1 = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right]}}$$

د سیومتریکی بارویشنی له امله
کړونلاین y_3 و $x = a + (l/2)$ ته
سیومتري دی د کړونلاین y_1 سره.
له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه
شمیرل کیږي.

3. Bereich: $a + l \leq x \leq 2a + l$ ورشو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a + l - x$$

$$\underline{\underline{y_3 = \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right]}}$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په یو رابندفورم کې د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right] & \text{für } a \leq x \leq a+l \\ \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right] & \text{für } a+l \leq x \leq 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف
راګرونونه رامنځ ته کیږي

$$y_{\max_1} = y(0) = y_{\max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{\max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 - 3a(a+l)(-a)\right]$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l\right]$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l) = y_{max_2}$$

$$y_{max_3} = y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$= y_2\left(a+\frac{l}{2}\right) = y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2 - \frac{1}{2}(2a+l)^2 + a(a+l)\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2) + a^2 + al\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-a^2 - al - \frac{l^2}{4} + a^2 + al\right]$$

$$= -\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z\,dz = \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y > 0.$

$$\frac{z^2}{2} = 2y^{\frac{1}{2}} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 4\sqrt{y} + 2c_1^*$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z = \sqrt{4\sqrt{y} + c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$t = 4\sqrt{y} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t} - \frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t} - 2c_1\sqrt{t}\right) + c_2$$

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{Artanh}\,\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\,\text{Artanh}\,\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$x=-2\,\frac{1}{\sqrt{c_1}}\,\text{Artanh}\,\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\,\text{Artanh}\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

$$\int dx=\int\frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $y\neq 0$ لپاره

$\neq$

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y\neq 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2t\,dt = \frac{2y}{y^2}\,dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

د دي اینتیګریشن سره ل
لږوديني څخه تيريدنه ناشونی ده

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$= \int y\,dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}}\,dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\ x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + $$

$$+ \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}}\left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots\right]$$

د $y \neq 0$ لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\,dy = k^2 \int z\,dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3}(y^3 - 3c_1^*)$$

$c_1 = -3c_1^*$

$$z = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y^3 + c_1}$$

$$\int \mathrm{d}x = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د $|x|<1$ لپاره

د دې اینتیګرال شمیرنه یواځې د لړۍ ودیزئینی له لارې شونې ده.

$$\blacktriangleright \frac{y^3}{c_1} = x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځیالمساوات هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کې شمیرلی دفرنځیالمسا- وات خانګړی حالت دی. د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

ایتیګرال په ټوټه یا پارشلماتو ماتو ټوټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2} \right] dt$$

د ځلوونو یا ضریبونو انډول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}\, t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1}\, t + t^2)$$

$$1=t^3(A-C)+t^2(-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D)+t(-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1})+$$
$$+Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && 0=A-C && \Rightarrow A=C\\
&\text{II:} && 0=-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D\\
&\text{III:} && 0=-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1}\\
&\text{IV:} && 1=Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II:} && 0=-2A\sqrt{c_1}+B+D\\
&\text{III:} && 0=-2B\sqrt{c_1}+2D\sqrt{c_1}\quad \|:2\sqrt{c_1} && \Rightarrow B=D\\
&\text{IV:} && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{II:} && 0=-2A\sqrt{c_1}+2B\quad \|\cdot c_1\\
&\text{IV:} && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+2Bc_1
\end{aligned}\right\}+$$

$$1=\quad 4Bc_1\qquad \Rightarrow \underline{\underline{B=\frac{1}{4c_1}=D}}$$

$$\text{IV:}\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+\frac{1}{2}\qquad \Rightarrow \underline{\underline{A=\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}=C}}$$

له دې سره x شمیرل یږي.

$$x=4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$=\frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t|-\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t|+\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right]+c_2$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right|+\frac{2t}{c_1-t^2}\right]+c_2$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right|+\frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right]+c_2$$

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ► بنسبت اینتیگرال

$$x=\operatorname{Arctan} z+c_1$$

$$\operatorname{Arctan} z = x - c_1$$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1)\,dx$$

$$\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\cos(x - c_1)| + c_2}}$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{Arsinh} z$$

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

$$\operatorname{Arsinh} z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1)\,dx$$

$$= \underline{\underline{\cosh(x + c_1) + c_2}}$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z;\quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^z$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= t \cdot \ln t - t + c_2$$

$$= t(\ln t - 1) + c_2$$

$$= \underline{\underline{(c_1 - x)[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2}}$$

30. $y'' = y'^3$

زینګولاراوبیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$; نیونه

$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$y'^2 - 3y''^2 = 0$

$y'^2 = 3y''^2$

$y' = \pm\sqrt{3}y''$

پارتیکولار اوبیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نیونه

$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$

$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$

$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*$

$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot\underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$

$z = c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$

$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot dx$

$y = \pm\sqrt{3}c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2$

د $c_1 = 0$ سره په دې کې
پارتیکولاراوبیونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$

زیکولارزوبیونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$y = ax + b$

نیونه : $y'' = z \neq 0$

$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$

$\frac{dz}{dx} = -z^2$

$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$

$\frac{1}{z} = x + c_1$

$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$

$$= \ln |x+c_1| + c_2$$

د ورپسی ایتیګریشن لپاره
دې ارزښتکرښی کیښول شي

1. Fall: $x + c_1 > 0$

$$y' = \ln (x+c_1) + c_2$$

$$y = (x+c_1)[\ln (x+c_1) - 1] + c_2 x + c_3$$

2. Fall: $x + c_1 < 0$

$$y' = \ln (-x-c_1) + c_2$$

$$y = (x+c_1)[\ln (-x-c_1) - 1] + c_2 x + c_3$$

د ارزښتکرښوکارونی سره د دواړو
حالتتوپیرونو لاس ته راوړنی یا
نتیجی رایوځای کیږي

$$y = (x+c_1)[\ln |x+c_1| - 1] + c_2 x + c_3$$

$$y = ax + b$$

33. $xy'^2 = y$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت
x, dx und y, dy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیګریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x} + c_1 = 2\sqrt{y} + c_2$$

$$\frac{c_1 - c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$

$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$